

## 第3讲 二次函数与方程、不等式 (练习)

### 一、二次函数与坐标轴交点

#### 练习

1. 抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 $y$ 轴交点的坐标是 ( ) .

- A. (0, 2)                      B. (1, 0)                      C. (0, -3)                      D. (0, 0)

【答案】 A

【解析】  $\because$  抛物线与 $y$ 轴交点的横坐标为0, 即 $x = 0$ ,  
 $\therefore$  此时 $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  
 $\therefore$  抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 $y$ 轴交点的坐标是(0, 2).  
故选A.

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

2. 抛物线 $y = -2(x - 1)^2 - 3$ 与 $y$ 轴交点的坐标为 \_\_\_\_\_ .

【答案】 (0, -5)

【解析】 当 $x = 0$ 时,  $y = -2 \times 1 - 3 = -5$ ,  
则抛物线 $y = -2(x - 1)^2 - 3$ 与 $y$ 轴交点的坐标为(0, -5),  
故答案为: (0, -5).

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

#### 练习

3. 已知二次函数 $y = kx^2 - 7x - 7$ 的图象与 $x$ 轴没有交点, 则 $k$ 的取值范围为 ( ) .

- A.  $k > -\frac{7}{4}$                       B.  $k \geq -\frac{7}{4}$  且  $k \neq 0$                       C.  $k < -\frac{7}{4}$                       D.  $k > -\frac{7}{4}$  且  $k \neq 0$

【答案】 C

【解析】  $\because y = kx^2 - 7x - 7$ 的图象与 $x$ 轴无交点,

∴当图象在 $x$ 轴上方时,  $\begin{cases} k > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ,

∴ $\begin{cases} k > 0 \\ 49 + 28k < 0 \end{cases}$ , 解为空集.

当图象在 $x$ 轴下方时,  $\begin{cases} k < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ ,

∴ $\begin{cases} k < 0 \\ 49 + 28k < 0 \end{cases}$ ,

∴ $k < -\frac{7}{4}$ .

∴ $k$ 的取值范围是 $\left\{k \mid k < -\frac{7}{4}\right\}$ .

故选C.

**【标注】**【知识点】二次函数与坐标轴交点

4. 若函数 $y = (a-1)x^2 - 4x + 2a$ 的图象与 $x$ 轴有且只有一个交点, 则 $a$ 的值为 \_\_\_\_\_.

**【答案】** -1或2或1

**【解析】** ∵函数 $y = (a-1)x^2 - 4x + 2a$ 的图象与 $x$ 轴有且只有一个交点,

当函数为二次函数时,  $a-1 \neq 0$ ,

$$b^2 - 4ac = 16 - 4(a-1) \times 2a = 0,$$

解得:  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 2$ ,

当函数为一次函数时,

$a-1 = 0$ , 解得:  $a = 1$ .

故答案为: -1或2或1.

**【标注】**【知识点】二次函数与坐标轴交点

5. 若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 $x$ 轴只有一个公共点, 且过点 $A(m, n)$ ,  $B(m+6, n)$ , 则 $n$ 的值为 ( ) .

A. 9

B. 6

C. 3

D. 0

**【答案】** A

**【解析】** ∵抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 $x$ 轴只有一个交点,

∴当 $b^2 - 4ac = 0$ ,  $b^2 = 4c$ ,

∴点 $A(m, n)$ ,  $B(m+6, n)$ ,

∴点 $A$ 、 $B$ 关于直线 $x = -\frac{b}{2}$ 对称,

$$\begin{aligned}
 &\therefore A\left(-\frac{b}{2}-3, n\right), \\
 &\therefore n = \left(-\frac{b}{2}-3\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2}-3\right) + c \\
 &= -\frac{1}{4}b^2 + c + 9, \\
 &\therefore b^2 = 4c, \\
 &\therefore n = -\frac{1}{4} \times 4c + c + 9 = 9. \\
 &\text{故选A.}
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

6. 关于 $x$ 的函数 $y = ax^2 + (2a + 1)x + a - 1$ 与坐标轴有两个交点，则 $a$ 的取值有（ ）.
- A. 4个                      B. 3个                      C. 2个                      D. 1个

【答案】B

【解析】 $\because$ 关于 $x$ 的函数 $y = ax^2 + (2a + 1)x + a - 1$ 的图象与坐标轴有两个交点，

$\therefore$ 可分如下三种情况：

①当函数为一次函数时，即有 $a = 0$ ，

$\therefore a = 0$ ，此时， $y = x - 1$ ，与坐标轴有两个交点；

②当函数为二次函数时，（即 $a \neq 0$ ），与 $x$ 轴有一交点，与 $y$ 轴有一个交点，

$\therefore$ 函数与 $x$ 轴有一个交点，

$\therefore \Delta = 0$ ，

$\therefore (2a + 1)^2 - 4a(a - 1) = 0$ ，

解得： $a = -\frac{1}{8}$ ；

③函数为二次函数时（即 $a \neq 0$ ），与 $x$ 轴有两个交点，与 $y$ 轴的交点和 $x$ 轴上的一个交点重合，即图象经过坐标原点 $(0, 0)$ ，

$\therefore a - 1 = 0$ ，

$\therefore a = 1$ ，

$\therefore$ 当 $a = 1$ ，此时， $y = x^2 + 3x$ ，与坐标轴有两个交点，

$\therefore$ 综上所述， $a$ 的取值为 $0, -\frac{1}{8}, 1$ 。

故选B。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

7. 对于二次函数 $y = 4(x + 1)(x - 3)$ 下列说法正确的是( ) .

- A. 图象开口向下  
B. 与 $x$ 轴交点坐标是 $(1, 0)$ 和 $(-3, 0)$   
C.  $x < 0$ 时,  $y$ 随 $x$ 的增大而减小  
D. 图象的对称轴是直线 $x = -1$

**【答案】** C

**【解析】** A 选项:  $\because$

$$y = 4(x + 1)(x - 3) = 4(x - 1)^2 - 16,$$

$\therefore a = 4 > 0$ , 该抛物线的开口向上, 故A错误;

B 选项: 与 $x$ 轴的交点坐标是 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ ,

故B错误;

C 选项: 当 $x < 1$ 时,  $y$ 随 $x$ 的增大而减小, 故C正确;

D 选项: 图象的对称轴是直线 $x = 1$ , 故D错误;

故选 C.

**【标注】**【能力】推理论证能力

**【知识点】**二次函数与坐标轴交点

8. 若二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $(-1, 0)$ , 则方程 $ax^2 - 2ax + c = 0$ 的解为( ) .

- A.  $x_1 = -3$ ,  
B.  $x_1 = 1, x_2 = 3$   
C.  $x_1 = -1, x_2 = 3$   
D.  $x_1 = -3, x_2 = 1$   
 $x_2 = -1$

**【答案】** C

**【解析】**  $\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $(-1, 0)$ ,

$\therefore$ 方程 $ax^2 - 2ax + c = 0$ 一定有一个解为: $x = -1$ ,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为: 直线 $x = 1$ ,

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象与 $x$ 轴的另一个交点为:  $(3, 0)$ ,

$\therefore$ 方程 $ax^2 - 2ax + c = 0$ 的解为:  $x_1 = -1, x_2 = 3$ .

**【标注】**【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

9.

已知二次函数 $y = x^2 - 5x + m$ 的图象与 $x$ 轴有两个交点，若其中一个交点的坐标为 $(1, 0)$ ，则另一个交点的坐标为（ ）。

A.  $(-1, 0)$

B.  $(4, 0)$

C.  $(5, 0)$

D.  $(-6, 0)$

【答案】 B

【解析】  $\because$ 二次函数 $y = x^2 - 5x + m$ ，

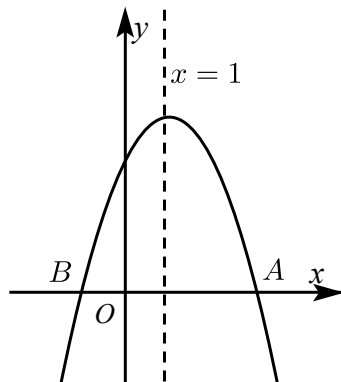
$\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{5}{2}$ ，

$\because$ 一个交点坐标为 $(1, 0)$ ，

$\therefore$ 另一个交点坐标为 $(4, 0)$ 。

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

10. 如图，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(3, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，则点 $B$ 的坐标是 \_\_\_\_\_。



【答案】  $(-1, 0)$

【解析】  $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 $x$ 轴交于 $A, B$ 两点，

$\therefore$ 点 $A$ 与点 $B$ 关于直线 $x = -1$ 对称，

而对称轴是直线 $x = 1$ ，点 $A$ 的坐标为 $(3, 0)$ ，

$\therefore$ 点 $B$ 的坐标是 $(-1, 0)$ 。

故答案为 $(-1, 0)$ 。

【标注】 【知识点】 二次函数与坐标轴交点

## 练习

11. 抛物线 $y = x^2 - 4$ 与 $x$ 轴交于 $B, C$ 两点，顶点为 $A$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为（ ）。

A.  $4\sqrt{5}$

B.  $4\sqrt{5} + 4$

C. 12

D.  $2\sqrt{5} + 4$

**【答案】** B**【解析】**  $\because$  令  $y = 0$ ,  $x^2 - 4 = 0$ ,

$$x_1 = 2, x_2 = -2,$$

$$\therefore BC = 4,$$

抛物线  $y = x^2 - 4$  的顶点坐标为  $A(0, -4)$ ,

$$\therefore AB = AC = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } = AB + AC + BC$$

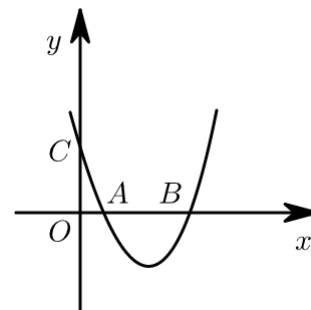
$$= 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4$$

$$= 4\sqrt{5} + 4.$$

故选 B.

**【标注】** 【知识点】二次函数与坐标轴交点

12. 如图, 二次函数  $y = x^2 - 4x + 3$  的图象交  $x$  轴于  $A, B$  两点, 交  $y$  轴于  $C$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为 ( ) .



A. 6

B. 4

C. 3

D. 1

**【答案】** C**【解析】** 在  $y = x^2 - 4x + 3$  中, 当  $y = 0$  时,  $x = 1$  或  $3$ ; 当  $x = 0$  时,  $y = 3$ ;即  $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ,

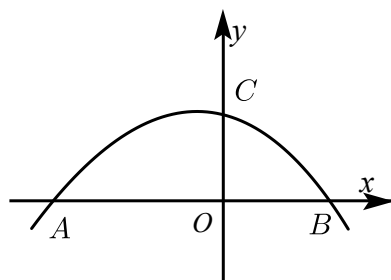
$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的面积为: } \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3.$$

故选 C.

**【标注】** 【知识点】二次函数与坐标轴交点

13.

如图：已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $x$ 轴交于 $A$ 、 $B$ 两点，与 $y$ 轴交于 $C$ 点，且 $2OA = 3OB = 4OC$ ，则 $b$ 的值为（ ）。



A.  $-\frac{1}{2}$

B.  $-\frac{1}{4}$

C.  $-\frac{3}{4}$

D.  $-1$

【答案】B

【解析】略。

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

## 练习

14. 在平面直角坐标系中作出二次函数 $y = x^2 - 2x - 6$ 的图象，由图象可知，方程 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 有两个根，一个在 $-2$ 和 $-1$ 之间，另一个在 $3$ 和 $4$ 之间。利用计算器进行探索：由下表知，方程的一个近似根是（ ）。

| $x$ | 3.5   | 3.6   | 3.7  | 3.8  |
|-----|-------|-------|------|------|
| $y$ | -0.75 | -0.24 | 0.29 | 0.84 |

A. 3.5

B. 3.6

C. 3.7

D. 3.8

【答案】B

【解析】当 $y$ 等于0时， $x$ 的值即为方程 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 的一个根，分析表格方程的解应为 $y$ 最接近0时 $x$ 的值。 $x = 3.6$ 时的 $y$ 值更接近0。

【标注】【知识点】图象法求一元二次方程的近似根

15. 下列表格是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的自变量 $x$ 与函数值 $y$ 的对应值，判断方程 $ax^2 + bx + c = 0$ （ $a \neq 0$ ， $a$ ， $b$ ， $c$ 为常数）的一个解 $x$ 的范围是（ ）。

| $x$                 | -2.14 | -2.13 | -2.12 | -2.11 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| $y = ax^2 + bx + c$ | -0.03 | -0.01 | 0.02  | 0.04  |

A.  $-2.14 < x < -2.13$

B.  $-2.13 < x < -2.12$

C.  $-2.12 < x < -2.11$

D.  $-2.11 < x < -2.10$

【答案】B

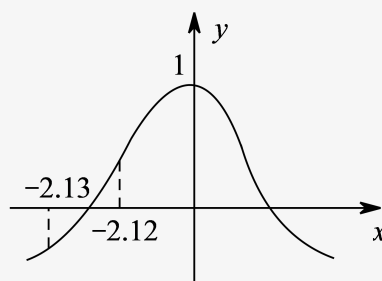
【解析】我们通过表格发现 $x = -2.13$ 时， $y = -0.01 < 0$  .

$x = -2.12$ 时， $y = 0.02 > 0$  .

所以当 $-2.13 < x < -2.12$ 时，肯定存在一个 $x$ 使

得 $y = 0$  .

故选B .

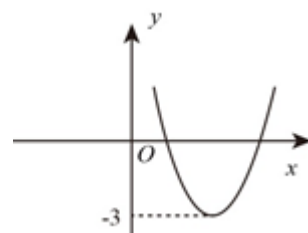


【标注】【知识点】图象法求一元二次方程的近似根

### 练习

16. (五中·月考) 已知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，那么关于 $x$ 的方程

$ax^2 + bx + c + 2 = 0$ 的根的情况是 ( )



A. 无实数根

B. 有两个相等实数根

C. 有两个异号实数根

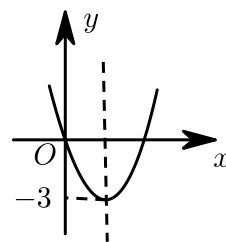
D. 有两个同号不等实数根

【答案】D

【解析】略

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

17. 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图所示，若一元二次方程 $ax^2 + bx + m = 0$ 有实数根，则 $m$ 的取值范围是 ( ) .



A.  $m \leq 3$

B.  $m \geq 3$

C.  $m \leq -3$

D.  $m \geq -3$

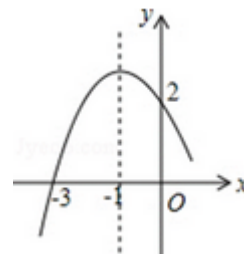


【答案】 A

【解析】 由图可得， $-m \geq -3$ ，所以 $m \leq 3$  .

【标注】 【知识点】 二次函数与一元二次方程的关系

18. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的部分图象如图所示，则关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$  ( $a \neq 0$ ) 的解为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $x = 0$ 或 $x = -2$

【解析】 抛物线的对称轴为 $x = -1$ ，与 $y$ 轴交于点 $(0, 2)$ ，

当 $y = 2$ 时， $ax^2 + bx + c = 2$  ( $a \neq 0$ )，

即纵坐标为2的点是 $(0, 2)$ 或 $(-2, 2)$ ，

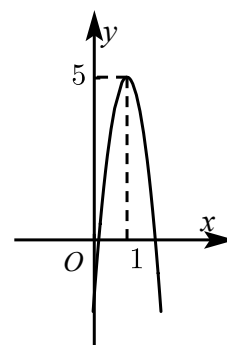
$\therefore x = 0$ 或 $x = -2$ ，

$\therefore$ 关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的解为 $x_1 = 0$ ， $x_2 = -2$ ；

故答案为： $x_1 = 0$ ， $x_2 = -2$ .

【标注】 【知识点】 二次函数与一元二次方程的关系

19. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，若方程 $ax^2 + bx + c = k$ 有两个不相等的实数根，则 $k$ 的取值范围是 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $k < 5$

【解析】由图象可知：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(1, 5)$ ，

$$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} = 5, \text{ 即 } b^2 - 4ac = -20a,$$

$\therefore ax^2 + bx + c = k$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c - k = 0$ 的判别式 $\Delta > 0$ ，

$$\text{即 } b^2 - 4a(c - k)$$

$$= b^2 - 4ac + 4ak$$

$$= -20a + 4ak$$

$$= -4a(5 - k) > 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore 5 - k > 0,$$

$$\therefore k < 5.$$

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

## 练习

20. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与自变量 $x$ 的部分对应值如表：

|     |     |    |   |   |   |     |
|-----|-----|----|---|---|---|-----|
| $x$ | ... | -1 | 0 | 1 | 3 | ... |
| $y$ | ... | -3 | 1 | 3 | 1 | ... |

现给出下列说法：

- ①该函数开口向下．
- ②该函数图象的对称轴为过点 $(1, 0)$ 且平行于 $y$ 轴的直线．
- ③当 $x = 2$ 时， $y = 3$ ．
- ④方程 $ax^2 + bx + c = -2$ 的正根在3与4之间．

其中正确的说法为 \_\_\_\_\_ ．（只需写出序号）

【答案】①③④

【解析】 $\therefore$ 二次函数值先由小变大，再由大变小，

$\therefore$ 抛物线的开口向下，所以①正确；

$\therefore$ 抛物线过点 $(0, 1)$ 和 $(3, 1)$ ，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$ ，所以②错误；

点 $(1, 3)$ 和点 $(2, 3)$ 为对称点，所以③正确；

$\therefore x = -1$ 时， $y = -3$ ，

$\therefore x = 4$ 时,  $y = -3$ ,

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的函数值为 $-2$ 时,  $-1 < x < 0$ 或 $3 < x < 4$ ,

即方程 $ax^2 + bx + c = -2$ 的负根在 $-1$ 与 $0$ 之间, 正根在 $3$ 与 $4$ 之间, 所以④正确.

**【标注】**【题型】图象与系数的关系

21. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $(-3, 0)$ 与 $(1, 0)$ 两点, 关于 $x$ 的方程

$ax^2 + bx + c + m = 0 (m > 0)$ 有两个根, 其中一个根是 $3$ . 则关于 $x$ 的方程

$ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根, 这两个整数根是 ( ).

A.  $-2$ 或 $0$

B.  $-4$ 或 $2$

C.  $-5$ 或 $3$

D.  $-6$ 或 $4$

**【答案】** B

**【解析】**  $\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 $x$ 轴交点坐标为 $(-3, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ ,

$\therefore$ 关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c + m = 0$ , 其中一根为 $3$ ,

$\therefore$ 根据对称性可知方程的另一根为 $-5$ ,

$\therefore$ 关于 $x$ 的方程 $ax^2 + bx + c + n = 0 (0 < n < m)$ 有两个整数根, 分别为 $x_1$ 、

$x_2 (x_1 < x_2)$ ,

$\therefore x_1 = -4, x_2 = 2$ ,

故这两个整数根为 $-4$ 或 $2$ .

故选B.

**【标注】**【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

## 练习

22. 已知二次函数 $y = (x - a)(x - b)$ , 其中 $a < b$ ,  $m, n (m < n)$ 是方程 $1 + (x - a)(x - b) = 0$

的两个根, 则实数 $a, b, m, n$ 的大小关系是 ( ).

A.  $a < m < b < n$

B.  $m < a < b < n$

C.  $a < m < n < b$

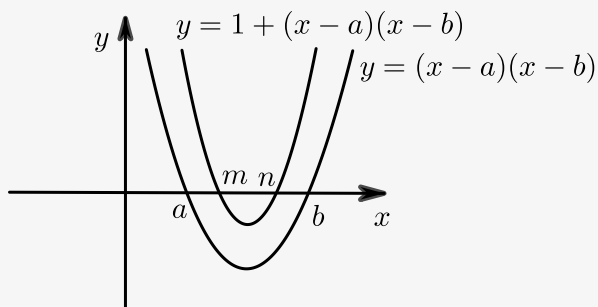
D.  $m < a < n < b$

**【答案】** C

**【解析】**  $\therefore$ 函数 $y = (x - a)(x - b)$ 与 $x$ 轴的交点坐标为 $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,

二次函数 $y = 1 + (x - a)(x - b)$ 相当于 $y = (x - a)(x - b)$ 向上平移一个单位,

又因为二次函数为 $1$ , 开口向上, 如图所示:



∴由图可得： $a < m < n < b$  .

故选C .

**【标注】**【知识点】二次函数与坐标轴交点

23. “如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 $x$ 轴有两个公共点，那么一元二次方程有两个不相等的实数根.” 请根据你对这句话的理解，解决下面问题；若 $p$ 、 $q$  ( $p < q$ )是关于 $x$ 的方程

$2 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两根，且 $a < b$ ，则请用“ $<$ ”来表示 $a$ 、 $b$ 、 $p$ 、 $q$ 的大小关系是\_\_\_\_\_ .

**【答案】**  $p < a < b < q$

**【解析】** 令 $y = (x - a)(x - b)$ ，则该函数的图象开口向上，

当 $y = 0$ 时， $x_1 = a$ ， $x_2 = b$ ，

当 $y = 2$ 时，

$$2 = (x - a)(x - b) ,$$

$$\text{即 } 2 - (x - a)(x - b) = 0 ,$$

∵ $p$ 、 $q$  ( $p < q$ )是关于 $x$ 的方程 $2 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两根，且 $a < b$ ，

$$\therefore p < a < b < q .$$

故答案为： $p < a < b < q$  .

**【标注】**【知识点】二次函数与坐标轴交点

## 练习

24. 一次函数 $y = x + b$ 的图象与抛物线 $y = x^2 + 3x - 1$ 只有一个交点，则 $b =$ \_\_\_\_\_ .

**【答案】** 4

**【解析】** 由题可知它们只有一个交点，我们可以联立方程组解答此题。

联立方程组，把一式 $y = x + b$ 代入抛物线方程解，即可得到答案。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

25. 直线 $y = x$ 与抛物线 $y = x^2 - 2$ 有两个交点 $P$ 和 $Q$ ，则 $PQ =$ \_\_\_\_\_.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】由题意得：
$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

$\therefore P$ 和 $Q$ 点的坐标为 $(2, 2)$ 、 $(-1, -1)$ ，

从点 $(-1, -1)$ 向 $y$ 轴作垂线与从点 $(2, 2)$ 向 $x$ 轴作垂线相交于一点 $M$ ，

则 $\triangle PMQ$ 为直角三角形，

$$\text{则 } PQ = \sqrt{(-1-2)^2 + [-1+(-2)]^2} = 3\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

26. 直线 $y = 2x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 3x$ 的交点坐标为\_\_\_\_\_.

【答案】 $(-2, -2)$ ， $(1, 4)$

【解析】 $\therefore$ 由题意得
$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x^2 + 3x \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 $y = 2x + 2$ 与抛物线 $y = x^2 + 3x$ 的交点坐标为 $(-2, -2)$ ， $(1, 4)$ 。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

## || 练习

27. 如果过两点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, a)$ 的直线与抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 没有交点，那么实数 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】 $a < -\frac{13}{4}$

【解析】含参解析式必须也要求解的快速准确。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

28. 已知函数  $y = mx^2 - 3x + 2$  ( $m$  是常数), 若一次函数  $y = x + 1$  的图象与该函数的图象恰好只有一个交点, 则交点坐标为 \_\_\_\_\_.

**【答案】**  $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$  或  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

**【解析】** ①当  $m = 0$  时, 函数  $y = mx^2 - 3x + 2$  为一次函数  $y = -3x + 2$ ,

令:  $-3x + 2 = x + 1$ , 解得  $x = \frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  交点为  $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ .

②当  $m \neq 0$  时, 函数  $y = mx^2 - 3x + 2$  为二次函数. 若一次函数  $y = x + 1$  的图象与函数  $y = mx^2 - 3x + 2$  的图象只有一个交点, 令  $mx^2 - 3x + 2 = x + 1$ , 即

$$mx^2 - 4x + 1 = 0,$$

由  $\Delta = 0$ , 得  $m = 4$ , 此时交点为  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

故答案为:  $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$  或  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

29. 若二次函数  $y = x^2$  与一次函数  $y = kx - 2$  的图象有交点, 则  $k$  的值可以是 ( ).

A. 1

B. 0

C. -1

D. -3

**【答案】** D

**【解析】** 二次函数  $y = x^2$  与一次函数  $y = kx - 2$  的图象有交点,

则可列  $x^2 = kx - 2$ ,  $x^2 - kx + 2 = 0$ ,

即  $x^2 - kx + 2 = 0$  有解,

根的判别式  $b^2 - 4ac = k^2 - 8 \geq 0$ ,

解得  $k^2 \geq 8$ .

故选 D.

**【标注】**【知识点】一次函数与二次函数的交点

## 练习

30. 已知二次函数图象的对称轴平行于  $y$  轴, 顶点为  $(1, 2)$ , 且与直线  $y = 2x + k$  相交于  $(2, -1)$ , 试求:

(1) 二次函数的解析式.

(2)  $k$  的值.

(3) 该二次函数的图象与直线  $y = 2x + k$  的另一交点的坐标.

**【答案】** (1) 二次函数解析式为  $y = -3(x-1)^2 + 2$ .

(2)  $k = -5$ .

(3) 二次函数的图象与直线  $y = 2x + k$  的另一交点的坐标为  $(-\frac{2}{3}, -\frac{19}{3})$ .

**【解析】** (1) 因为二次函数图象的顶点为  $(1, 2)$ , 对称轴平行于  $y$  轴,

所以, 可令此二次函数的解析式为  $y = a(x-1)^2 + 2$ .

又点  $(2, -1)$  在二次函数的图象上, 则有  $-1 = a(2-1)^2 + 2$ , 得  $a = -3$ .

故所求的二次函数解析式为  $y = -3(x-1)^2 + 2$ .

(2) 由题意知点  $(2, -1)$  在直线  $y = 2x + k$  上, 则  $-1 = 2 \times 2 + k$ . 得  $k = -5$ .

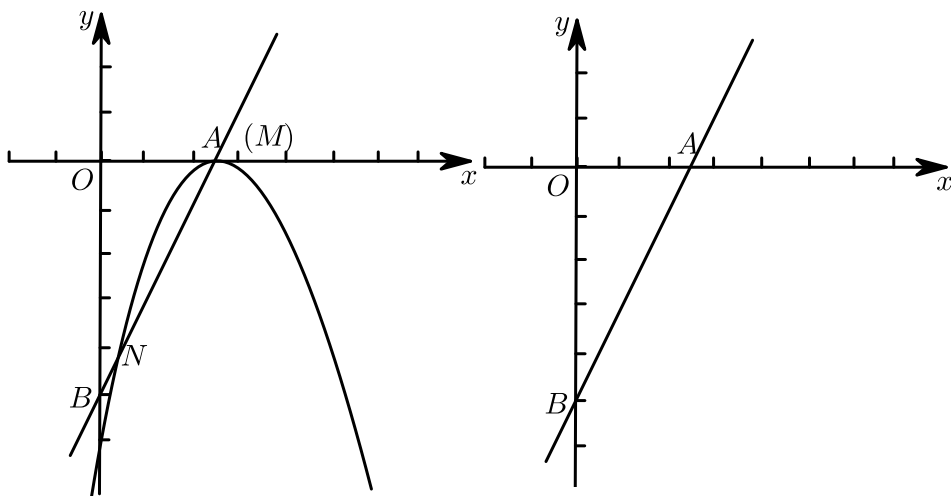
(3) 根据题意有  $2x - 5 = -3(x-1)^2 + 2$ , 即  $3x^2 - 4x - 4 = 0$ , 得  $x = 2$  或  $x = -\frac{2}{3}$ .

所以  $x = 2$  时,  $y = -1$ ;  $x = -\frac{2}{3}$  时,  $y = -\frac{19}{3}$ .

故二次函数的图象与直线  $y = 2x + k$  的另一交点的坐标为  $(-\frac{2}{3}, -\frac{19}{3})$ .

**【标注】** 【知识点】一次函数与二次函数的交点

31. 已知直线  $y = 2x - 5$  与  $x$  轴和  $y$  轴分别交于点  $A$  和点  $B$ , 抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  的顶点  $M$  在直线  $AB$  上, 且抛物线与直线  $AB$  的另一个交点为  $N$ .



(1) 如图, 当点  $M$  与点  $A$  重合时, 求抛物线的解析式.

(2) 在(1)的条件下, 求点  $N$  的坐标和线段  $MN$  的长.

**【答案】** (1)  $y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}$ .

(2)  $N(\frac{1}{2}, -4)$ ,  $MN = 2\sqrt{5}$ .

【解析】(1)  $\because$  直线  $y = 2x - 5$  与  $x$  轴和  $y$  轴交于点  $A$  和点  $B$ ,

$$\therefore A\left(\frac{5}{2}, 0\right), B(0, -5),$$

当顶点  $M$  与点  $A$  重合时,  $M\left(\frac{5}{2}, 0\right),$

$$\therefore \text{抛物线的解析式是: } y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\text{即 } y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}.$$

(2)  $\because N$  在直线  $y = 2x - 5$  上, 设  $N(a, 2a - 5)$ , 又  $N$  在抛物线  $y = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}$  上,

$$\therefore 2a - 5 = -a^2 + 5a - \frac{25}{4},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{2} \text{ 或 } a = \frac{5}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore N\left(\frac{1}{2}, -4\right),$$

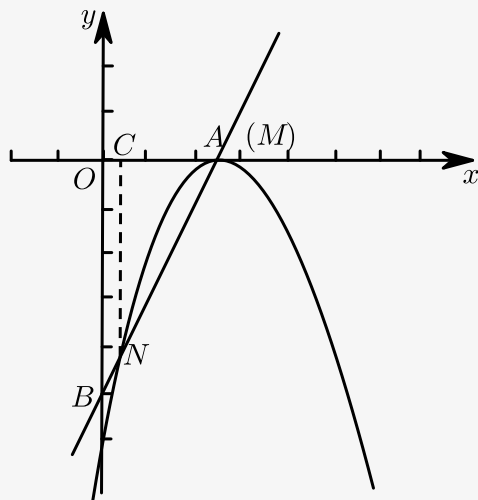
过  $N$  作  $NC \perp x$  轴, 垂足为  $C$ ,

$$\therefore N\left(\frac{1}{2}, -4\right),$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\therefore NC = 4, MC = OM - OC = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2,$$

$$\therefore MN = \sqrt{NC^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$



【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

32. 在平面直角坐标系中, 已知抛物线  $y = -x^2 + 3x + m$ , 其中  $m$  为常数.

(1) 当抛物线经过点  $(3, 5)$  时, 求该抛物线的解析式.

(2) 当抛物线与直线  $y = x + 3m$  只有一个交点时, 求该抛物线的解析式.

(3) 当  $0 \leq x \leq 4$  时, 试通过  $m$  的取值范围讨论抛物线与直线  $y = x + 2$  的公共点的个数的情况.



【答案】(1) 抛物线得解析式为  $y = -x^2 + 3x + 5$ .

(2) 抛物线得解析式为  $y = -x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ .

(3) 当  $m < 1$  或  $m > 10$  时, 没有公共点,  
当  $1 < m \leq 2$  时, 有两个公共点,  
当  $2 < m \leq 10$  或  $m = 1$  时, 有一个公共点.

【解析】(1)  $\because$  过点  $(3, 5)$ ,

$$\therefore -9 + 9 + m = 5,$$

$$\therefore m = 5,$$

$\therefore$  抛物线得解析式为  $y = -x^2 + 3x + 5$ .

(2)  $\because$  抛物线与直线  $y = x + 3m$  只有一个交点,

$$\therefore \text{由} \begin{cases} y = -x^2 + 3x + m \\ y = x + 3m \end{cases} \text{可得 } x^2 - 2x + 2m = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 0, \text{ 可得 } m = \frac{1}{2},$$

$\therefore$  抛物线得解析式为  $y = -x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ .

$$(3) \text{ 由 } \begin{cases} y = -x^2 + 3x + m \\ y = x + 2 \end{cases} \text{ 可得 } x^2 - 2x + 2 - m = 0,$$

由  $\Delta = 0$ , 可得  $m = 1$ , 此时只有一个公共点,

在直线  $y = x + 2$  上, 当  $x = 0$  时,  $y = 2$ ,

当  $x = 4$  时,  $y = 6$ ,

将  $(0, 2)$  代入抛物线  $y = -x^2 + 3x + m$ , 得  $m = 2$ ,

将  $(4, 6)$  代入抛物线  $y = -x^2 + 3x + m$ , 得  $m = 10$ ,

① 当  $m < 1$  时, 没有公共点,

② 当  $1 < m \leq 2$  时, 有两个公共点,

③ 当  $2 < m \leq 10$  时, 有一个公共点,

④ 当  $m > 10$  时, 没有公共点.

综上, 当  $m < 1$  或  $m > 10$  时, 没有公共点,

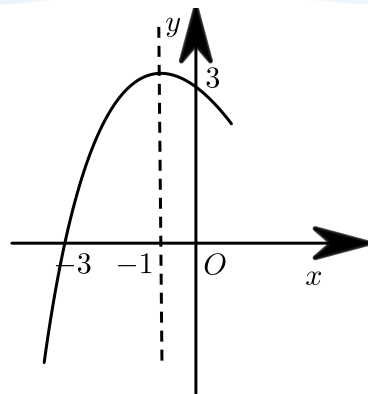
当  $1 < m \leq 2$  时, 有两个公共点,

当  $2 < m \leq 10$  或  $m = 1$  时, 有一个公共点.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

## 练习

33. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  的部分图象如图所示, 则不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集是 ( ) .



- A.  $x > -3$                       B.  $x < -3$                       C.  $-3 < x < 1$                       D.  $x < -3$  或  $x > 1$

**【答案】** D

**【解析】** 不等式的解即为二次函数在 $x$ 轴下方时所对应的 $x$ 的范围，图象与 $x$ 轴的另一个交点坐标必然和 $(-3, 0)$ 关于对称轴 $x = -1$ 对称，因此为 $-1 \times 2 - (-3) = 1$ 。

因此，在 $x$ 轴下方时所对应的 $x$ 的取值范围为 $x < -3$ 或 $x > 1$ 。

A、B、C均不全面或不满足，只有D完全符合。

故选D。

**【标注】**【知识点】利用二次函数解不等式问题

34. 已知函数 $y = -x^2 + x + 2$ ，则当 $y < 0$ 时，自变量 $x$ 的取值范围是（ ）。

- A.  $x < -1$  或  $x > 2$       B.  $-1 < x < 2$                       C.  $x < -2$  或  $x > 1$       D.  $-2 < x < 1$

**【答案】** A

**【解析】** 解：当 $y = 0$ 时， $-x^2 + x + 2 = 0$ ，

$$(x + 1)(-x + 2) = 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2,$$

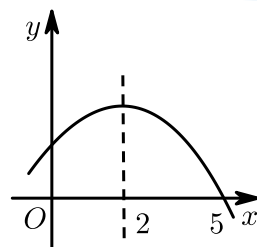
由于函数开口向下，

可知当 $y < 0$ 时，自变量 $x$ 的取值范围是 $x < -1$ 或 $x > 2$ 。

故选A。

**【标注】**【知识点】利用二次函数解不等式问题

35. 如图是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象，由图象可知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是（ ）。



A.  $-1 < x < 5$

B.  $x > 5$

C.  $x < -1$

D.  $x < -1$ 或 $x > 5$

【答案】A

【解析】∵抛物线的对称轴是直线 $x = 2$ ，与 $x$ 轴的一个交点坐标是 $(5, 0)$ ，

∴另一个交点坐标是 $(-1, 0)$ ，

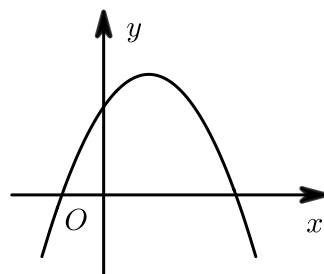
又∵抛物线开口向下，

∴不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $-1 < x < 5$ 。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

### 练习

36. 如图是二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$ 的图象，使 $y \geq 1$ 成立的 $x$ 的取值范围是（ ）。



A.  $-1 \leq x \leq 4$

B.  $x \leq 0$

C.  $x \geq 1$

D.  $0 \leq x \leq 4$

【答案】D

【解析】当 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3 = 1$ 时，

$$(x-2)^2 = 4,$$

$$x-2 = \pm 2,$$

$$x_1 = 4 \text{ 或 } x_2 = 0,$$

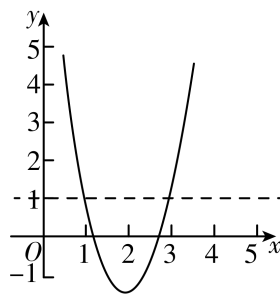
当 $y \geq 1$ 时，

由图可得 $0 \leq x \leq 4$ ，

故选D。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

37. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与直线 $y = 1$ 的交点坐标为 $(1, 1)$ ， $(3, 1)$ ，则不等式 $ax^2 + bx + c - 1 > 0$ 的解集为( )。



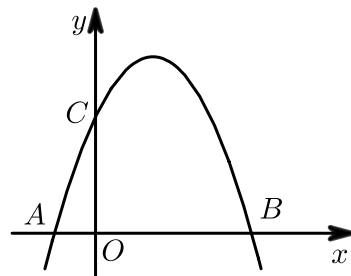
- A.  $x > 1$                       B.  $1 < x < 3$                       C.  $x < 1$ 或 $x > 3$                       D.  $x > 3$

【答案】C

【解析】根据图象得二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图象与直线 $y = 1$ 的交点坐标为 $(1, 1)$ ， $(3, 1)$ ，  
而 $ax^2 + bx + c - 1 > 0$ ，即 $y > 1$ ，  
故 $x < 1$ 或 $x > 3$ 。  
故选：C。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

38. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 分别交坐标轴于 $A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 4)$ ，则 $0 \leq ax^2 + bx + c < 4$ 的解集是\_\_\_\_\_。



【答案】 $-2 \leq x < 0$ 或 $4 < x \leq 6$

【解析】 $\because A(-2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ ，  
 $\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ ，  
 $\therefore$ 点C的对称点的坐标为 $(4, 4)$ ，

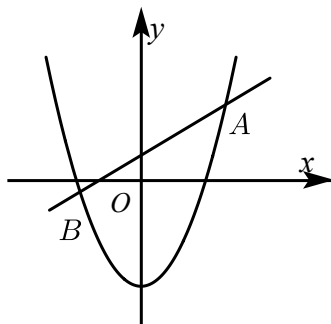
$\therefore 0 \leq ax^2 + bx + c < 4$  的解集为  $-2 \leq x < 0$  或  $4 < x \leq 6$  .

故答案为： $-2 \leq x < 0$  或  $4 < x \leq 6$  .

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

### 练习

39. 如图，若抛物线  $y = ax^2 + h$  与直线  $y = kx + b$  交于  $A(3, m)$  ,  $B(-2, n)$  两点，则不等式  $ax^2 - b < kx - h$  的解集是 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $-2 < x < 3$

【解析】 设  $y_1 = ax^2 + h$  ,  $y_2 = kx + b$  ,

$$\therefore ax^2 - b < kx - h ,$$

$$\therefore ax^2 + h < kx + b ,$$

$$\therefore y_1 < y_2 ,$$

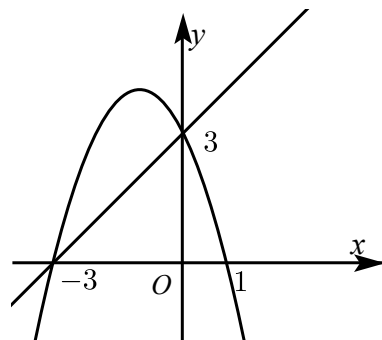
即二次函数值小于一次函数值，

$\therefore$  抛物线与直线交点为  $A(3, m)$  ,  $B(-2, n)$  ,

$\therefore$  由图象可得， $x$  的取值范围是  $-2 < x < 3$  .

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

40. 二次函数  $y_1 = ax^2 + bx + c$  与一次函数  $y_2 = mx + n$  的图象如图所示，则满足  $ax^2 + bx + c > mx + n$  的  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

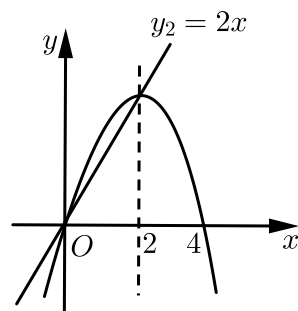


【答案】  $-3 < x < 0$

【解析】 由图可知，当  $-3 < x < 0$  时二次函数图象在一次函数图象上方，  
所以满足  $ax^2 + bx + c > mx + n$  的  $x$  的取值范围是  $-3 < x < 0$  .

【标注】 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

41. 抛物线  $y_1 = -x^2 + 4x$  和直线  $y_2 = 2x$  的图象如图，那么不等式  $-x^2 + 4x > 2x$  的解集是 ( ) .



A.  $x < 0$

B.  $0 < x < 2$

C.  $x > 2$

D.  $x < 0$  或  $x > 2$

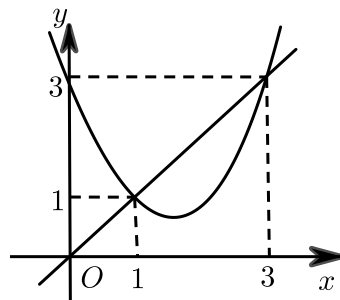
【答案】 B

【解析】 由图可知，抛物线  $y_1 = -x^2 + 4x$  和直线  $y_2 = 2x$  的交点坐标为  $(0, 0)$ ， $(2, 4)$ ，所以，不等式  $-x^2 + 4x > 2x$  的解集是  $0 < x < 2$  .  
故选B .

【标注】 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

## || 练习

42. 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  与一次函数  $y = x$  的图象如图所示，则不等式  $ax^2 + (b-1)x + c < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_ .



【答案】  $1 < x < 3$

【解析】由函数图象可知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = x$ 的图象交于点 $(1, 1)$ 和 $(3, 3)$ ，

不等式 $ax^2 + (b - 1)x + c < 0$ 的解集即为不等式 $ax^2 + bx + c < x$ 的解集，

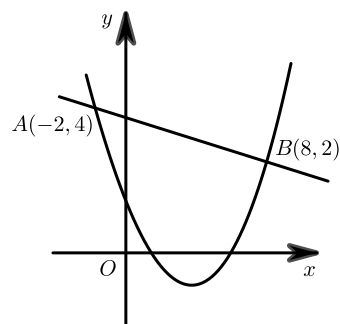
由函数图象可知：当 $1 < x < 3$ 时， $ax^2 + bx + c < x$ ，

$\therefore$ 不等式 $ax^2 + (b - 1)x + c < 0$ 的解集为 $1 < x < 3$ 。

故答案为： $1 < x < 3$ 。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

43. 如图，已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与一次函数 $y_2 = kx + m (k \neq 0)$ 的图象相交于点 $A(-2, 4)$ ， $B(8, 2)$ ，则关于 $x$ 的不等式 $ax^2 + (b - k)x + c - m > 0$ 的解集是 \_\_\_\_\_。



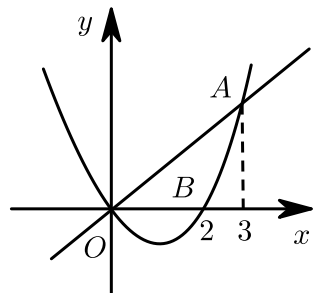
【答案】 $x < -2$ 或 $x > 8$

【解析】先对这个不等式进行变形，然后观察图象。

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

## 练习

44. 如图，已知二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，与 $x$ 轴交于点 $B(2, 0)$ ，若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 $x$ 的取值范围是（ ）。



A.  $0 < x < 2$

B.  $0 < x < 3$

C.  $2 < x < 3$

D.  $x < 0$ 或 $x > 3$

**【答案】** C

**【解析】**  $\because$  二次函数  $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$  的图象与正比例函数  $y_2 = \frac{2}{3}x$  的图象交于点  $A(3, 2)$  ,  
与  $x$  轴交于点  $B(2, 0)$  ,

$\therefore$  由图象得 : 若  $0 < y_1 < y_2$  , 则  $x$  的取值范围是 :  $2 < x < 3$  .

**【标注】** 【知识点】 一次函数与二次函数的交点